

« Données » en didactique des mathématiques

Contribution de Denise GRENIER, Université Grenoble Alpes

Le terme « donnée » est très polysémique et utilisé dans des domaines divers. Il y a un consensus implicite sur sa signification en didactique des mathématiques (peu de travaux de recherche l'ont étudié). Je vais tenter dans ce texte d'en préciser quelques caractéristiques.

Nécessité d'inscrire les données dans un cadre théorique épistémologique et didactique

Les « données » en didactique des mathématiques dépendent de la question de recherche, et donc de l'objet mathématique étudié et du cadre théorique didactique choisi pour étudier cette question. Une donnée n'est donc pas juste l'énoncé d'un fait, d'une observation. Donnons d'abord quelques rappels à propos des théories didactiques et cadres théoriques.

La Didactique des Mathématiques a pour objet d'étude les processus de construction des savoirs et savoir-faire mathématiques et leur transmission dans des dispositifs ayant une intention d'enseigner. Une des finalités de ces recherches est de construire des « savoirs didactiques » et des outils pour comprendre l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques et faire des propositions fiables pour l'améliorer. Les questions de recherche sont au croisement des mathématiques et des sciences humaines, et interpellent des domaines comme l'épistémologie, les sciences cognitives, les sciences de l'éducation. Différentes théories didactiques ont été élaborées, développant des approches spécifiques.¹ Leur « validation » comme théories « scientifiques » nécessite de les confronter à d'autres théories, et aussi de les soumettre aux contingences de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques, la critique et la réfutation devant être possibles. Rappelons que les mathématiques sont au centre des travaux de didactique des mathématiques, pas seulement comme textes de savoir, mais aussi comme savoirs construits socialement. C'est ce qui fait l'originalité des théories didactiques développées dans notre communauté.

Le cadre théorique et méthodologique doit être cohérent avec les objectifs didactiques et mathématiques visés. Ce choix a une grande importance pour la crédibilité que l'on pourra donner aux « résultats » de la recherche. Un cadre théorique doit donc être constitué en relation avec la question de recherche (on ne peut pas le choisir avant d'avoir posé celle-ci). Dans son texte pour le WEJCH 2019, Artigue reprend la définition de Castela pour différencier cadre théorique et théorie :

« J'appelle cadre théorique l'assemblage conceptuel théorique qu'un chercheur constitue lorsqu'il s'intéresse à une question donnée, sachant que l'élaboration de ce cadre théorique va en retour influencer sur la façon dont la question va être problématisée et soumise au travail de recherche. »

Toute question de recherche est basée sur des « hypothèses de travail ». Par exemple, une hypothèse sous-jacente aux théories didactiques est que le sens d'un concept mathématique se construit par la résolution de problèmes qui le mettent en jeu. Balacheff et Laborde décrivent de façon claire cette hypothèse (in Lakatos 1984) :

« Ce sont les situations-problèmes pour lesquelles l'« objet mathématique » constitue un outil de solution fiable, efficace, économique qui seront pour les élèves la source du sens donné à cet objet (savoir ou savoir faire). Dans ce cadre, notre tâche est de concevoir les conditions d'une véritable épistémologie artificielle, à savoir un rapport épistémologique *provoqué et contrôlé* par l'enseignant pour l'acquisition d'un savoir mathématique authentifiable. L'apport de l'épistémologie est ici essentiel : le sens du savoir mathématique n'est pas tout entier enfermé dans les textes ; il se trouve dans l'histoire des concepts, c'est-à-dire dans le cadre problématique de leur genèse, dans ce qui a fait obstacle ou a favorisé leur émergence. »

¹ Je ne décrirai pas ici ces théories, tout étudiant en thèse en connaît au moins l'essentiel.

Hypothèses, question de recherche et type de données en didactique des mathématiques

La question des « données » dans une recherche en Didactique des Mathématiques peut se décliner en sous-questions telles celles-ci :

- Quel type de données peut apporter des réponses à la question de recherche ?
- Quelle méthodologie pour leur recueil (dispositif, temporalité) ?
- Quels outils seront pertinents pour les analyser ?
- Comment les décontextualiser et les dépersonnaliser ?

Les réponses à ces questions sont sous-tendues par des postulats fondamentaux, même s'ils sont évidents, on peut les rappeler.

– Avant de formuler la question de recherche, il faut faire une analyse épistémologique de l'objet mathématique et une étude des travaux existants en didactique ou dans des domaines proches. L'étude épistémologique doit être centrée sur le savoir, et indépendante des programmes et instructions officielles, indépendante aussi des connaissances des acteurs du système éducatif qui seront impliqués. Ceci assure que le regard porté sur les mathématiques en jeu dans la recherche ne sera pas biaisé, du point de vue du sens et de l'écriture de ce savoir par des contingences et contraintes curriculaires ou « occasionnelles ». L'étude institutionnelle viendra ensuite, elle est nécessaire pour situer la question de recherche et pour l'analyse des observations. Ces « données théoriques » permettent éventuellement de reformuler la question de recherche. Elles sont nécessaires pour appuyer et justifier les résultats de la recherche en articulation avec l'étude épistémologique, en particulier pour reconnaître des obstacles qui n'auraient pas été anticipés.

– Les données issues d'expérimentations – interviews, enquêtes, situations d'ingénierie, etc – doivent permettre d'apporter des réponses à la question de recherche et de valider ou invalider les hypothèses de travail. Elles doivent être inscrites dans le cadre théorique et méthodologique choisi et rapportées à l'objet d'étude. Ces données doivent être consistantes, tant du point de vue mathématique que du point de vue didactique, c'est un moyen d'assurer que le travail de recherche apportera des éléments didactiques nouveaux et originaux. Leur étude se fait en confrontation avec l'analyse préalable qui doit être la plus complète possible.

– Les données obtenues par des interviews ou des questionnaires (sans résolution de problème mathématique), si elles ont un réel intérêt pour appréhender les conceptions des acteurs du système éducatif, fournissent des informations « personnalisées » et de type « discours sur.. ». C'est le cas par exemple lorsque un mathématicien ou un enseignant parlent d'une notion mathématique et de la manière dont ils l'ont apprise et l'enseignent (ou l'enseigneraient!). Inclure dans ce type de données un moment pour la résolution d'une question mathématique ou didactique peut apporter des éléments de contrôle à ce discours, et assurer que les résultats obtenus seront fiables même si l'échantillon des interviewés est limité.² Ce type de données est rarement suffisant dans le cadre d'une recherche.

– L'observation et l'analyse de dispositifs didactiques existants non construits par le chercheur peut apporter des éléments sur les pratiques des enseignants et/ou les conceptions des élèves en situation, à condition qu'une analyse préalable ait été effectuée : analyse du savoir « à enseigner », information sur le projet de l'enseignant, les pré-requis supposés des élèves, etc.. Comme toute observation introduit un biais sur les faits observés, il faut avoir à l'esprit que ces données sont complexes à récolter, puis à analyser.

– La construction d'une situation spécifique pour la recherche apporte des éléments d'un autre ordre. Elle s'appuie à la fois sur l'étude épistémologique et curriculaire, les connaissances supposées des élèves, et une analyse didactique préalable qui justifie les choix des problèmes et du dispositif (en termes de variables, contraintes). Le recueil des observations de ce type de situations semble *a priori* plus « simple » que pour des situations existantes, car les choix ont

² C'est l'analyse a priori d'un problème, d'une situation, d'une ingénierie, qui permet de justifier que nos données ne sont pas soumises aux contraintes des échantillons statistiques.

été faits par le chercheur en accord avec sa propre étude épistémologique et didactique. Mais il ne faut pas oublier que toute hypothèse doit pouvoir être réfutée et ne pas retenir dans l'analyse les seuls éléments qui conforteraient les objectifs visés. Il s'agit en effet de pouvoir inférer des résultats « scientifiques » (toute prudence gardée), c'est-à-dire des éléments de réponse à la question de recherche pouvant être décontextualisés et dépersonnalisés (au moins partiellement), et ouverts à la réfutation.

Un exemple de données relatives au raisonnement et à la preuve dans une situation de recherche

Les savoirs et savoir-faire du raisonnement mathématique et de la preuve sont au fondement de toute activité mathématique. Les « situations de recherche pour la classe » (SiRC), qui relèvent d'un *modèle de situation adidactique*, ont été construites pour favoriser les interactions entre les dialectiques action/formulation/validation (Grenier et Payan 1998, 2003). Les caractéristiques et contraintes du modèle SiRC entraînent des conditions de réalisation et de gestion particulières, adaptables à des niveaux différents³. Ce modèle d'activité pour l'élève a été étudié dans des thèses (Ouvrier-Buffet, Deloustal-Jorrand, Godot, Giroud, Colipan) et aussi, pendant de nombreuses années, dans une unité d'enseignement optionnel⁴ à l'université de Grenoble. Les savoirs et savoir-faire en jeu dans les SiRC sont ceux qui fondent l'activité mathématique et la résolution de problème : expérimenter, résoudre des cas particuliers, formuler des conjectures et les étudier, prouver. Ce sont donc des données complexes pour lesquelles nous avons défini des critères pour les reconnaître et les analyser. Nous les donnerons lors de l'exposé.

Références

- Artigue M. (2019) Contribution au texte *Opérationnalisation du cadre théorique*, texte des chercheurs invités au WEJCH2019.
- Balacheff N. et Laborde J. M. (1984) Introduction à l'édition française in *Preuve et réfutations essai sur la logique de la découverte mathématique*, Imre Lakatos, Hermann, éditeur des sciences et des arts.
- Sur les SiRC**
- Colipan X. (2015) *Étude de situations de recherche pour la classe construites sur des jeux combinatoires de types Nim*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- Deloustal-Jorrand V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- Giroud N. (2011) *Rôle de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- Godot K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18.2, 59-100, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Grenier D., Payan, C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, Octobre 2002.
- Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

3 La caractérisation du modèle SiRC et des conditions de gestion en classe peuvent être consultés dans Grenier et Payan 2003, texte en ligne.

4 U.E. « Jeux-mathématiques et raisonnements combinatoires » pour les étudiants de Licence en L1 et L2, 24 heures sur un semestre ; enseignements assurés par des membres des équipes « combinatoire et didactique » et « maths-à-Modeler » de l'UGA.